Mathématiques : Exercices de synthèse.

Préparation à l'entrée en classe de Première Scientifique.

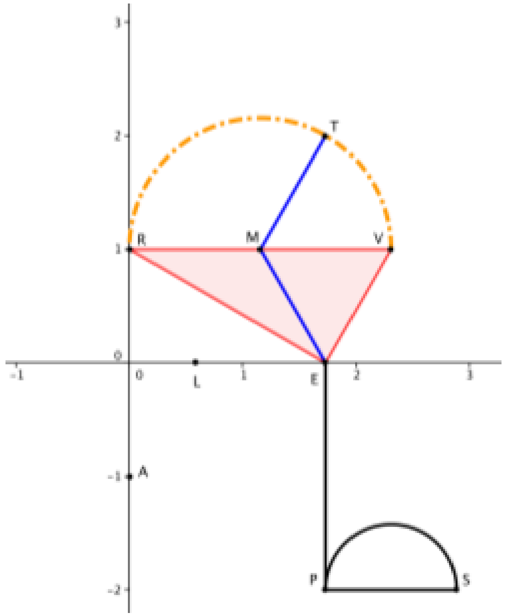
Rentrée 2017/2018

Pour vous aider à faire le point sur des notions essentielles du programme de mathématiques, voici une série d'exercices à faire pour la rentrée.
Les réponses seront, si nécessaire, débattues en classe lors des premières séances et ce travail sera suivi d'une évaluation.
Afin que ce travail soit efficace, il est conseillé de l'effectuer à la fin des vacances, pour vous remettre en mémoire ces notions et bien démarrer votre année de première.
Bonnes vacances puis bonnes révisions

Exercice 1. COCKTAIL ANALYTIQUE EN EQUILIBRE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $V\left(\frac{4}{3}\sqrt{3};1\right)$, $E\left(\sqrt{3};0\right)$ et $R\left(0;1\right)$.

1. Déterminer la nature du triangle VER.
2. En déduire que ce triangle VER est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre M et le rayon r.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (ME).
4. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) parallèle à (ME) passant par R.
5. (d) coupe l'axe des abscisses en L. Déterminer les coordonnées de L.
6. Déterminer l'équation réduite de la droite (ML).
7. (ML) coupe l'axe des ordonnées en A. Déterminer les coordonnées de A.
8. Déterminer les coordonnées de P tel que RAPE soit un parallélogramme.
9. Déterminer l'équation réduite de la droite (PE).
10. (PE) et (ML) se coupent en T. Déterminer les coordonnées de T.
11. Le point T appartient-il à $\mathcal{C}$?
12. Déterminer l'équation réduite de la droite (d') parallèle à l'axe des abscisses et passant par P.
13. (d') et (ME) se coupent en S. Déterminer les coordonnées de S.



Exercice 2.

ABCD est un parallélogramme. Placer les points F et G tels que : $\overrightarrow{BF} = 3\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. On veut savoir si F, D et G sont alignés en utilisant plusieurs méthodes.

1. <u>Méthode 1</u> : avec les vecteurs repérés
   On munit le plan du repère $\left(B;\overrightarrow{BC},;\overrightarrow{BA}\right)$.
   a. Les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont-ils colinéaires ?
   b. Conclure.

2. <u>Méthode 2</u> : avec une équation de droite
   On munit le plan du repère $\left(B;\overrightarrow{BC},;\overrightarrow{BA}\right)$.
   a. Déterminer une équation de la droite (FD)
   b. Le point G appartient-il à la droite (FD) ?
   c. Conclure.

3. <u>Méthode 3</u> : avec le calcul vectoriel
   a. Démontrer que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}$.
   b. Démontrer que $\overrightarrow{DG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
   c. Conclure.

Exercice 3.

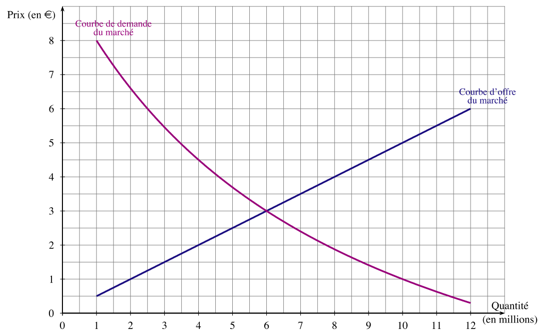
On considère l'équation (E) : $x^2 + 2x + m = 0$
L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet au moins une solution réelle.

1. Résoudre dans IR les équations ci-dessous :
   a. $x^2 + 2x = 0$
   b. $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. a. Vérifier que pour tout réel x, $x^2 + 2x + m = (x+1)^2 - 1 + m$
   b. Justifier alors que résoudre l'équation (E) dans IR revient à résoudre l'équation $(x+1)^2 = 1 - m$
   c. Conclure.

Exercice 4.

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :
- la fonction d'offre f est donnée par $f(q) = 0{,}5q$
- la fonction demande g est donnée par $g(q) = \dfrac{78 - 6q}{q + 8}$

où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



1. À l'aide du graphique précédent et en argumentant la réponse, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il ?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

Exercice 5.

Dans un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées (1 ;1).
M est un point quelconque de la droite d et on note x l'abscisse de M.

1. On définit la fonction f par $f(x) = AM^2$.
   a. Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x + 3$
   b. Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$
   c. Vérifier que l'expression $5(x + 0{,}6)^2 + 3{,}2$ est la forme canonique de $f(x)$.
   d. Etudier les variations de la fonction f.
   e. Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?
   f. M_0 est le point de la droite d tel que AM^2 soit minimal.
      Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0{,}6; 1{,}8)$.
2. On considère le point $B(0; 3)$
   a. Vérifier que B appartient à la droite d.
   b. Déterminer la nature du triangle ABM_0.
   c. Que peut-on dire des droites (AM_0) et d ?

Exercice 6.

1. **En utilisant le tableau de variations ci-dessous, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.**

x	-7		-1		2		4
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

   a. Pour tout $x \in [-7; 2]$, $-1 \leq f(x) \leq 0$
   b. Pour tout $x \in [-7; 2]$, $f(x) \leq 7$
   c. Il existe un réel $x \in [-7; 2]$ tel que $f(x) = 0$
   d. Il existe un réel $x \in [-1; 2]$ tel que $f(x) = 0$
   e. Il existe un réel $x \in [-7; -1]$ tel que $f(x) \leq -1$

2. **On considère deux points A et B du plan, et des réels a, b et x.**
   Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis énoncer la réciproque et préciser si celle-ci est vraie ou fausse :
   a. Si x = 1 alors $x^2 = 1$
   b. Si $a^2 = b^2$ alors a = b
   c. Si $0 < a < b$ alors $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
   d. Si B est le milieu de [AC] alors AB = BC
   e. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors B milieu de [AC]