AUX FUTURS ELEVES DE TERMINALE S

Bonjour,

Afin de commencer l'année dans de bonnes conditions, nous vous avons préparé une feuille d'exercices de révision. Une interrogation sera faite dans les premières semaines de la rentrée sur ces exercices. Il convient donc de les avoir cherchés sérieusement.-

Vous devez savoir faire :

Analyse :

- Connaître par cœur les formules de dérivées.
- Etudier une fonction rationnelle (domaine de définition, dérivée, sens de variation).
- Savoir étudier une suite (variations, formules liées aux suites arithmétiques et géométriques, utilisation des algorithmes)
- Probabilités : Connaître et appliquer la loi binomiale

Géométrie

Connaître les définitions et propriétés du ou des :

- équations de droite
- notion de vecteur
- produit scalaire
- angles orientés

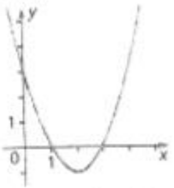
Bonnes vacances à tous et à bientôt

Les professeurs de Maths de Terminale S

Exercice 1

Quand la courbe de la fonction dérivée est connue

Soit une fonction numérique f définie sur $[-1;5]$ et sa fonction dérivée f', dont la courbe représentative dans le repère (O, I, J) est tracée ci-dessous.



1 a. À l'aide du graphique, déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b. En déduire les variations de f sur $[-1;5]$.

2 On veut tracer une représentation graphique $\mathcal{C}$ possible de la fonction f.

On sait que :

$f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(2) = -\frac{1}{3}$,

$f(3) = -1$ et $f(4) = -\frac{1}{3}$.

a. Placer dans le repère (O, I, J) les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 1, 2, 3 et 4.

b. Tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Tracer de même les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 1 ; 2 ; 3 et 4.

c. Proposer un tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

3 On veut déterminer l'expression de $f(x)$.

On suppose que pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Déterminer les valeurs de a, b, c et donner l'expression de $f(x)$.

4 Peut-on trouver d'autres fonctions admettant f' pour fonction dérivée ?

Exercice 4

Chez un fabriquant de calculatrices, une étude a montré que 2 % des produits ont un défaut.

Un professeur a commandé 34 de ces calculatrices pour ses élèves. Les probabilités que ces calculatrices aient des défauts sont indépendantes.

On définit la variable aléatoire X donnant le nombre de calculatrices défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. a. Déterminer à l'aide de la calculatrice (si elle n'est pas défectueuse !) la probabilité qu'aucune calculatrice de la classe ne soit défectueuse.

b. En déduire la probabilité qu'au moins une calculatrice soit défectueuse.

c. Déterminer la probabilité qu'au moins deux calculatrices soient défectueuses.

3. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette loi. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Droites concourantes

Soit ABC un triangle.

1. Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a. Construire le point G.

b. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2. Soit H un point tel que $2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{BH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

b. Construire le point H.

3. Soit K un point tel que $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

a. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

b. Construire le point K.

4. Soit L un point tel que $\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. Construire le point L.

5. a. Démontrer que $\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LB} = 3\overrightarrow{LG}$.

b. En déduire que L est le milieu de [GC].

6. a. Exprimer $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC}$ en fonction de $\overrightarrow{LH}$.

b. En déduire que L, A et H sont alignés.

7. Procéder de manière analogue pour démontrer que le point L appartient à la droite (KB).

8. Que peut-on dire des droites (GC), (HA) et (KB) ?

PISTE : Pour faciliter la construction, il pourra être judicieux de choisir le triangle ABC tel que AB = 6, BC = 5 et AC = 4.

Exercice 3

Corentin fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Corentin achète 50 composants.

1. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux.

2. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Exercice 5

Position d'une courbe et d'une de ses tangentes

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - x - 1$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.

b. Démontrer que, pour tout x de $[0;+\infty[$:

$$2\sqrt{x} \geqslant x + 1.$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Étudier la position de cette tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6

Calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O, I, J) du plan.

M est le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$.

1 Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O, I, J) ?

2 Calculer la distance IM.

3 Démontrer que $IM = 2 \times \sin\frac{\pi}{12}$.

4 En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

5 Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

6 Déduire des questions précédentes les lignes trigonométriques de :

$$\frac{11\pi}{12},\quad \frac{13\pi}{12},\quad \frac{5\pi}{12} \text{ et } \frac{7\pi}{12}.$$

Exercice 8

À la naissance d'Alban, sa grand-mère dépose sur un compte bancaire 100 € et décide d'augmenter ses versements de 2 % à chaque anniversaire. On suppose qu'Alban ne fait aucun ajout, ni retrait sur son compte.

Pour tout entier n, on note :

- a_n la somme versée par la grand-mère d'Alban à son n-ième anniversaire ($a_0 = 100$) ;
- S_n la somme totale disponible sur le compte bancaire d'Alban à son n-ième anniversaire :

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

1 Préciser la nature de la suite a. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

2 Montrer que pour tout entier n,

$$S_n = 5\,000 \times (1{,}02^{n+1} - 1).$$

3 Alban rêve d'acheter une guitare, qui coûte 1 999 €. Pour savoir à partir de quel âge il pourra se l'offrir, on propose l'algorithme incomplet ci-contre.

```
Variables :
  n : entier ; a, S : réels ;
Début
  n ← 0 ;
  a ← 100 ; S ← 100 ;
  Tant Que…Faire
    n ← n + 1 ;
    a ← a × … ;
    S ← S + a ;
  FinTantQue ;
  Afficher… ;
Fin.
```

a. Que représentent les variables n, a et S ? Compléter les pointillés.

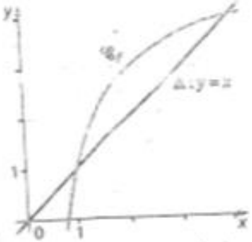
b. En utilisant le résultat de la question 2 et en n'utilisant que les variables n et S, modifier l'algorithme de façon à résoudre le problème.

c. Programmer l'un des algorithmes précédents, puis dire à partir de quel âge Alban pourra s'offrir la guitare.

Exercice 7

Utilisation d'une suite auxiliaire

On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.



1 Calculer u_1, u_2 et u_3.

2 On représente ci-contre la courbe d'équation

$$y = f(x)$$

où f est la fonction numérique, telle que pour tout entier n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Déterminer la fonction f.

b. Visualiser la suite u sur le graphique ci-dessus, et conjecturer :

– le sens de variation de la suite u ;

– la limite éventuelle de la suite u.

3 Pour tout entier n, on pose :

$$v_n = \frac{4 - u_n}{u_n - 1}.$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.

b. Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4 Pour aller plus loin

Prouver la conjecture émise à la question 2 b. sur les variations de u.