Mathématiques : Exercices de synthèse.

Préparation à l'entrée en classe de Première Scientifique.

Rentrée 2018/2019

Pour vous aider à faire le point sur des notions essentielles du programme de mathématiques, voici une série d'exercices à faire pour la rentrée.
Les réponses seront, si nécessaire, débattues en classe lors des premières séances et ce travail sera suivi d'une évaluation.
Afin que ce travail soit efficace, il est conseillé de l'effectuer à la fin des vacances, pour vous remettre en mémoire ces notions et bien démarrer votre année de première.
Bonnes vacances puis bonnes révisions

Exercice 1.

On rappelle les propriétés sur les racines carrées

Soient a et b deux nombres positifs,

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

1. Ecrire sous la forme a$\sqrt{b}$ avec b un entier le plus petit possible les nombres suivants :

A = $5\sqrt{27} - 27\sqrt{75} + 3\sqrt{3}$

B = $2\sqrt{75} \times \sqrt{6}$

C = $2\sqrt{5} + \sqrt{125} - 6\sqrt{45}$

2. Soit $D = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$
   Montrer que D est un nombre entier

3. Comparer E et F où E = $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ et F = $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

4. Calculer $(1 + \sqrt{3})^2$.
   En déduire que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$

5. Montrer que G, H, I et J sont des nombres décimaux.

G = $\frac{2\sqrt{50}+3\sqrt{8}}{4\sqrt{2}+\sqrt{32}}$ H = $\frac{\sqrt{27}+3\sqrt{48}}{\sqrt{3}-3\sqrt{12}}$

I = $\frac{3\sqrt{128}\times5\sqrt{12}}{2\sqrt{54}}$ J = $\frac{5\sqrt{162}\times7\sqrt{72}}{10\sqrt{144}}$

Exercice 2.

A. On considère un segment [AE] de longueur 8.
À tout point M de [AE], on associe les triangles équilatéraux AMI et MEL situés du même côté de [AE].
On pose AM = x et on considère la fonction f qui à x associe l'aire du triangle LIM.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Démontrer que pour tout réel x de D_f, $f(x) = 2\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$
3. Calculer l'image par la fonction f de $\frac{4}{\sqrt{3}}$ et $(\sqrt{3} - 1)$.
4. Résoudre dans D_f, $f(x) = (2\sqrt{3})x - 2\sqrt{3}$

B. L'objectif de la suite de l'exercice est de déterminer la position de M pour laquelle l'aire du triangle LIM est maximale.

1. Montrer que $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x-4)^2 + 4\sqrt{3}$.
2. Etudier le sens de variation de f sur D_f et dresser son tableau de variation.
3. En déduire la réponse au problème posé.

Exercice 3.

A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village.
Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.
On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes), avec $0 \leq q \leq 60$.
Charlie sait que le coût de production comme la recette de son entreprise est fonction de la quantité produite.
Son objectif est double :

- Rendre la production rentable,
- Maximiser le bénéfice de sa chocolaterie.

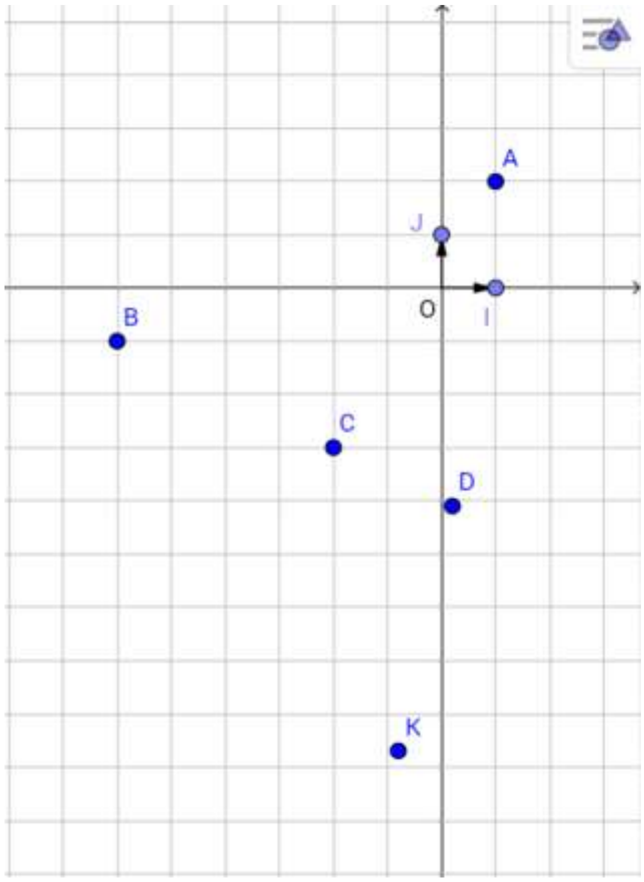
Les formules donnant le coût $C(q)$ et la recette $R(q)$ de la chocolaterie ont été calculées : $C(q) = q^2 + 30q + 1000$ et $R(q) = 100q$

1. a. Tracer les courbes représentant le coût et la recette sur votre calculatrice, en choisissant une fenêtre adaptée.
b. Conjecturer la quantité de chocolat que doit produire la chocolaterie pour être rentable. (Expliquer votre méthode)
c. Conjecturer la quantité à produire pour obtenir un bénéfice maximal. (Expliquer votre méthode)
2. a. Justifier que l'entreprise est rentable pour une production de chocolat q, si et seulement si q est solution de l'inéquation $-x^2 + 70x - 1000 \geq 0$
b. Montrer que cette inéquation équivaut à $(-x+20)(x-50) \geq 0$
c. En déduire les valeurs de q pour lesquelles l'entreprise est rentable.
3. Soit la fonction définie par $B(x) = -x^2 + 70x - 1000$
   a. A quoi correspond concrètement la fonction B ?
   b. Simplifier l'expression $f(x) = B(x) - 225$
   c. Montrer que pour tout x appartenant à $[0\,;60]$, $f(x) \leq 0$ et calculer $f(35)$
   d. Conclure sur le second objectif de Charlie.

Exercice 4.

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants : A(1 ;2) , B(-6 ;-1), C(-2 ;-3), D(0,2 ; -4,1)

Les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont égales à 1 unité.



1. On veut savoir si les points B, C et D sont alignés par deux méthodes.
   a. Déterminer l'équation réduite de la droite (BD) puis conclure.
   b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ puis conclure.

2. On appelle E le quatrième sommet du parallélogramme DABE.
   a. Déterminer par le calcul les coordonnées de E.
   b. Construire au compas le point E. On laissera les traits de construction apparents.

3. On appelle F le point d'intersection de la droite (AB) et de l'axe des abscisses.
   a. Placer le point F sur la figure.
   b. Donner l'ordonnée du point F.
   c. Déterminer l'équation réduite de (AB), et en déduire l'abscisse du point F.
   d. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$. Qu'observe-t-on ?

4. On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre C passant par le point A.
   a. Calculer la valeur exacte du rayon du cercle $\mathcal{C}$.
   b. Le point K de coordonnées (-0,8 ; -8,7) qui a été placé sur la figure ci-dessus appartient-il au cercle $\mathcal{C}$? On justifiera la réponse.

c. On considère le point L d'ordonnée 2,4 et qui appartient au cercle $\mathcal{C}$. Déterminer la(les) valeur(s) exacte(s) de son abscisse.

5. On appelle Δ la médiatrice du segment [AC].
   a. Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu M du segment [AC].
   b. Prouver que le point H de coordonnées (-8 ; 4) appartient à la droite Δ.
   c. En déduire l'équation de Δ.
   d. On appelle N le point de la droite Δ d'abscisse 1. Déterminer la valeur exacte de son ordonnée.
   e. Déterminer les coordonnées de P point d'intersection de Δ et (AB).

Exercice 5.

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai, faux ou si l'on ne peut pas savoir.

a. $2 \geq 0$
b. $\sqrt{a^2} = a$
c. $-x < 0$
d. Pour tout réel x, $(x+2)^2 = x^2 + 4$
e. Il existe un réel x tel que $(x+2)^2 = x^2 + 4$
f. Il existe un réel x tel que $x^2 + 3 = 2$
g. Pour tout réel x, $1 + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1}$

2. On considère deux points A et B du plan, et des réels a, b et x.
Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis énoncer la réciproque et préciser si celle-ci est vraie ou fausse :

a. Si $x^2 = 1$ alors $x = 1$
b. Si $a = b$ alors $a^2 = b^2$
c. Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$
d. Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$
e. Si AB = BC alors B est le milieu de [AC]
f. Si $\overline{AB} = \overline{BC}$ alors B est le milieu de [AC]

Justifier les réponses des implications a, d et e.

3. En utilisant le tableau de variations ci-dessous, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

x	-7		-1		2		4
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

a. Pour tout $x \in [-7; 2]$, $-1 \leq f(x) \leq 0$
b. Pour tout $x \in [-7; 2]$, $f(x) \leq 7$
c. Il existe un réel $x \in [-7; 2]$ tel que $f(x) = 0$
d. Il existe un réel $x \in [-1; 2]$ tel que $f(x) = 0$
e. Il existe un réel $x \in [-7; -1]$ tel que $f(x) \leq -1$