Mathématiques : Exercices de synthèse.

Préparation à l'entrée en classe de Première Scientifique.

Rentrée 2015/2016

Pour vous aider à faire le point sur des notions essentielles du programme de mathématiques, voici une série d'exercices à faire pour la rentrée.
Les réponses seront, si nécessaire, débattues en classe lors des premières séances et ce travail sera suivi d'une évaluation.
Afin que ce travail soit efficace, il est conseillé de l'effectuer à la fin des vacances, pour vous remettre en mémoire ces notions et bien démarrer votre année de première.
Bonnes vacances puis bonnes révisions.

Exercice 1.

Dans un parterre rectangulaire ABCD, un maçon souhaite construire une dalle en béton sur un quadrilatère MNPQ de telle sorte que M soit sur [AB], N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] avec comme condition AM = BN = CP = DQ. [AB] mesure 10 mètres et [AD] 6 mètres.

Le but du problème est de proposer différentes démarches pour répondre aux cinq questions ci-dessous que le maçon se pose.

1. Comment évolue l'aire de la surface bétonnée en fonction de AM ?
2. Est-il possible que l'aire de la surface bétonnée soit égale à l'aire de la surface restante ?
3. Comment faire pour que l'aire de la terrasse bétonnée soit la plus petite possible ?
4. Est-il possible que l'aire de la surface bétonnée soit égale à 60 % de l'aire du parterre ?
5. Est-il possible que l'aire de la surface bétonnée soit égale à 40 % de l'aire du parterre ?

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, par exemple Géogébra, vous pouvez réaliser la figure puis émettre des conjectures sur les questions posées.

b) Pour modéliser la situation, on pose AM = x en mètres. Après avoir précisé l'ensemble des valeurs possibles de x, exprimer l'aire f(x) de la terrasse bétonnée en fonction de x.

Montrer que : $f(x) = 2(x-4)^2 + 28$
$f(x) = 2(x-2)(x-6) + 36$

c) À l'aide de la calculatrice, émettre à nouveau des conjectures sur les questions posées.

d) En choisissant l'expression algébrique de f(x) la mieux adaptée, démontrer les différentes réponses conjecturées des questions posées.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur [1 ; 3] par $f(x) = x^2$ et soit g la fonction définie sur l'intervalle [1 ;3] par $g(x) = \dfrac{6-11x}{x-6}$

1. Développer $(x-1)(x-2)(x-3)$
2. Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse :
   a. Pour tout nombre réel de l'intervalle [1 ; 3], on a $f(x) = g(x)$
   b. Il existe un nombre réel de l'intervalle [1 ; 3] tel que $f(x) = g(x)$
   c. L'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins trois solutions sur l'intervalle [1 ; 3]
   d. L'inéquation $f(x) > g(x)$ n'admet aucune solution dans l'intervalle [1 ; 3]
   e. Si x est un nombre réel tel que $f(x) = g(x)$, alors x vaut 2.
   f. Si x vaut 2, alors $f(x) = g(x)$.

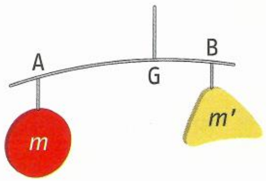
Exercice 3.

On pose A = $\sqrt{181 + 52\sqrt{3}}$ et B = $\sqrt{181 - 52\sqrt{3}}$.

1. Démontrer que deux réels positifs a et b sont rangés dans le même ordre que leur carré.
2. En déduire l'existence du nombre B.
3. Calculer A^2 et B^2 puis AB *(on demande des valeurs exactes simplifiées).*
4. En déduire $(A + B)^2$ puis la valeur exacte de A + B.
5. Développer $(2\sqrt{3}+13)^2$ et en déduire une écriture simplifiée de A.
6. Développer $(2\sqrt{3}-13)^2$ et en déduire une écriture simplifiée de B.
7. Retrouver grâce aux deux questions précédentes la valeur exacte de A + B obtenue à la question 4.

Exercice 4.

On construit un mobile en suspendant deux objets de masses m et m' à l'extrémité d'une tige AB.
Le mobile est accroché à une ficelle en G.
La masse de la tige est négligeable.



1. La loi d'Archimède indique que le solide est en équilibre quand $m\overrightarrow{GA} + m'\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

a. Démontrer que $(m + m')\overrightarrow{GA} + m'\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, puis que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{m'}{m+m'}\overrightarrow{AB}.$$

b. Représenter le mobile et placer le point G avec :

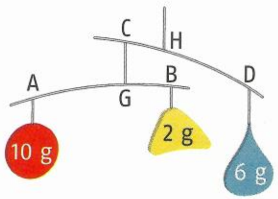
$$m = 10 \text{ g},\ m' = 15 \text{ g et } AB = 5 \text{ cm}.$$

c. Quelle masse doit-on accrocher en B si

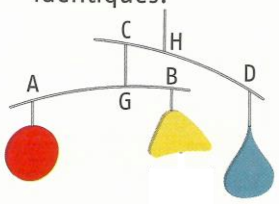
$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } m = 8 \text{ g ?}$$

2. Trouver la position des points G et H pour que les mobiles suivants soit en équilibre sachant que toutes les tiges mesurent 12 cm.

a.



b. Toutes les masses sont identiques.



Exercice 5.

On considère un triangle ABC, a un nombre réel ($a \neq 1$ et $a \neq 0$) et D et E les points définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

A. <u>Cas où a = – 1</u>

1. Construire une figure et placer les points D et E.
2. Montrer que ADBC est un parallélogramme.
3. Déterminer la nature du quadrilatère ABCE.
4. Montrer que A est le milieu du segment [ED].
5. Justifier que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

B. <u>Cas général</u>

On se place dans le repère (A ; B ; C)

1. Justifier que les coordonnées de D sont $(1; a)$.
2. Calculer les coordonnées de E.
3. Montrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
4. Soit K le point tel que ABKC soit un parallélogramme.
   a) Calculer les coordonnées du point K.
   b) Montrer que les points B, K et D sont alignés, puis que le point K est le point d'intersection des droites (BD) et (CE).

Exercice 6.

Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on considère les points C(a ; 0), B(0 ; b) et A(a ; b), a et b étant deux réels quelconques.

K, G, F et E, quand ils existent, sont respectivement les points d'intersection des droites (OA) et (BC), des droites (IJ) et (BC), des droites (IK) et (AC) et des droites (JK) et (AB).

Le but de ce problème est de démontrer, quand ils existent, que les points E, F et G sont alignés.

1. Donner les coordonnées de I et J puis déterminer celles de K.
2. Démontrer que si a = b alors G n'existe pas.
3. Démontrer que si a = 0 ou b = 0 alors E ou F n'existent pas.
4. Démontrer que si a = 2 ou b = 2 alors E ou F n'existent pas.
5. On se place maintenant dans le cas où les réels a et b sont distincts, non nuls et différents de 2.
   a) Déterminer les équations des droites (AC), (BC), (AB), (IJ), (IK) et (JK).
   b) En déduire les coordonnées des points E, F et G.
   c) Conclure.