Mathématiques : Exercices de synthèse.

Préparation à l'entrée en classe de Première Scientifique.

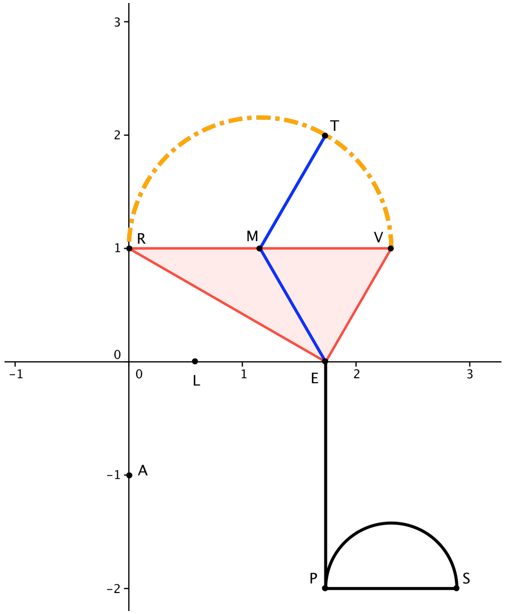
Rentrée 2016/2017

Pour vous aider à faire le point sur des notions essentielles du programme de mathématiques, voici une série d'exercices à faire pour la rentrée.
Les réponses seront, si nécessaire, débattues en classe lors des premières séances et ce travail sera suivi d'une évaluation.
Afin que ce travail soit efficace, il est conseillé de l'effectuer à la fin des vacances, pour vous remettre en mémoire ces notions et bien démarrer votre année de première.
Bonnes vacances puis bonnes révisions

Exercice 1. COCKTAIL ANALYTIQUE EN EQUILIBRE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $V\left(\frac{4}{3}\sqrt{3};1\right)$, $E\left(\sqrt{3};0\right)$ et $R\left(0;1\right)$.

1. Déterminer la nature du triangle VER.
2. En déduire que ce triangle VER est inscrit dans un cercle **C** dont on précisera le centre M et le rayon r.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (ME).
4. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) parallèle à (ME) passant par R.
5. (d) coupe l'axe des abscisses en L. Déterminer les coordonnées de L.
6. Déterminer l'équation réduite de la droite (ML).
7. (ML) coupe l'axe des ordonnées en A. Déterminer les coordonnées de A.
8. Déterminer les coordonnées de P tel que RAPE soit un parallélogramme.
9. Déterminer l'équation réduite de la droite (PE).
10. (PE) et (ML) se coupent en T. Déterminer les coordonnées de T.
11. Le point T appartient-il à **C** ?
12. Déterminer l'équation réduite de la droite (d') parallèle à l'axe des abscisses et passant par P.
13. (d') et (ME) se coupent en S. Déterminer les coordonnées de S.



Exercice 2.

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].

1. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.
4. Que peut-on alors conclure ?
5. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$
6. Placer le point G symétrique de F par rapport à C.
7. Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
8. En déduire la nature précise du quadrilatère AMDG.

Exercice 3.

On considère un segment [AE] de longueur 8.
À tout point M de [AE], on associe les triangles équilatéraux AMI et MEL situés du même côté de [AE].
On pose AM = x et on considère la fonction f qui à x associe l'aire du triangle LIM.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Démontrer que pour tout réel x de D_f, $f(x) = 2\sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
3. Calculer l'image par la fonction f de $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ et $(\sqrt{3}-1)$.
4. Résoudre dans D_f, $f(x) = (2\sqrt{3})x - 2\sqrt{3}$

L'objectif de la suite de l'exercice est de déterminer la position de M pour laquelle l'aire du triangle LIM est maximale.

1. Calculer $4\sqrt{3} - f(x)$ puis conclure.
2. Déterminer la forme canonique de f(x).
3. Etudier le sens de variation de f sur D_f.
4. Dresser le tableau de variation de f et retrouver la réponse à la question 5.

Exercice 4.

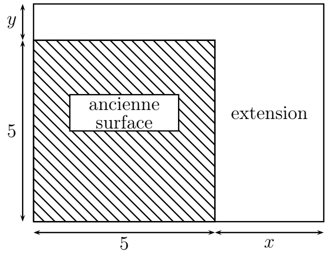
Partie A

Soit k la fonction définie par $k(x) = \dfrac{-8x+60}{x+5}$.

1. Sur quel ensemble, noté D_k, la fonction k est-elle définie ?
2. Montrer que pour tout x de D_k, $k(x) = -8 + \dfrac{100}{x+5}$.
3. Etudier le sens de variation de k sur $]-\infty;-5[$ et sur $]-5;+\infty[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction k.
(échelle 1cm =1 unité en abscisse et 1cm = 10 unités en ordonnée)
5. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-5;+\infty[$, $k(x) \geq -8$.
6. Déterminer l'ensemble solution de l'inéquation $k(x) \leq 0$.
7. Montrer que pour tout x de D_k, $k(x) = \dfrac{-5x+75}{x+5} - 3$.

Partie B

Pour satisfaire les vacanciers, le maire d'une station balnéaire de plus en plus fréquentée, décide d'agrandir la surface de jeu. Actuellement, celle-ci a la forme d'un carré de cinq mètres de côté.
Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle surface de jeu (ancienne surface et extension) en fonction de x et y.

2. Le maire souhaite que l'aire de la nouvelle surface de jeu soit égale à $100\,\text{m}^2$.
Vérifier que cette contrainte se traduit par l'égalité $y = \dfrac{-5x+75}{x+5}$.

3. La valeur de y est limitée à 3 mètres par le bord de mer et la valeur de x est limitée à 15 mètres par un jardin privé. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

Exercice 5.

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire si il est vrai, faux ou si l'on ne peut pas savoir.

a. $2 \geq 0$
b. $\sqrt{a^2} = a$
c. $x^2 > 0$
d. Pour tout réel x, $(x+2)^2 = x^2 + 4$
e. Il existe un réel x tel que $(x+2)^2 = x^2 + 4$
f. Il existe un réel x tel que $x^2 + 3 = 2$
g. Pour tout réel x, $1 + \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

2. On considère deux points A et B du plan, et des réels a, b et x.
Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis énoncer la réciproque et préciser si celle-ci est vraie ou fausse :

a. Si $x^2 = 1$ alors x=1
b. Si a=b alors $a^2 = b^2$
c. Si $x^2 < x$ alors $x < 1$
d. Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$
e. Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$
f. Si AB = BC alors B est le milieu de [AC]
g. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors B est le milieu de [AC]

Justifier les réponses des implications b, d et e.